



TITLE:

# 中国古代の周率(下) (数学史の研究)

AUTHOR(S):

杉本, 敏夫

---

CITATION:

杉本, 敏夫. 中国古代の周率(下) (数学史の研究). 数理解析研究所講究録  
2012, 1787: 79-87

ISSUE DATE:

2012-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/172781>

RIGHT:

## 中国古代の周率（下）

### Calculations of pi in the ancient China (Part II)

杉本 敏夫

Sugimoto Toshio

#### 第 13 節 密率の発見

前稿（上）の第 8 節で、祖沖之の今一つの重要な業績は、 $\pi$  の近似分数すなわち《密率 355/113 の発見》であると述べた。この項目は、すでに多くの学者が論及しているので、新見を加える余地は無いように思われる。しかし私は、一つの対案を示そう。[6] 錢宝琮によると、『隋書』律歷志に、祖沖之が  $\pi$  の近似分数《密率 355/113》を発見した、とある。以下この分数を屢々参照するので、 $Q=355/113$  と置く。 $Q$  は《密率》と呼ばれ、 $R=22/7$  は《約率》と呼ばれる。 $\pi$  の近似分数を目指して計算する過程で、約率  $R$  はごく自然に得られる。

#### 第 14 節 関孝和の算法

[9] 関孝和は正六角形でなく、正方形から出発して、直径 1 なる円に内接する正八角形、正十六角形等々の周  $P$  を求めて、131072 角形の周 3.141592653… を得た。次いでこの周の値に対する近似分数を求めるため、単純極まりない方法を用いた。すなわち、 $3/1, 7/2, 10/3, 13/4, 16/5, \dots$  と、分母を 1 だけ増やし、分子は絶えず  $U=3.141592$  に近い値になるように定めた。この方法によれば、祖沖之の《密率》355/113 に近づくため、112 回もの試行を必要とした。関の算法を弁護すれば、その過程で、古来、名前の付いた近似分数が凡て登場する。

#### 第 15 節 何承天の調日法

古代数学に表れた近似分数は、一般に天文・暦計算の必要から考案された。[10] 戴内によると、前漢（西暦前）では「四分暦」すなわち、一年を 365 日と四分の一 ( $1/4$ ) としたが、太初元年(前 104 年)に「太初暦」が公布され、端数を  $385/1539=0.25016244\dots$  と精密化した。これは一朔望月を 29 日と  $43/81=0.53086419\dots$  日と決めることと調和させるためだと言う。即ち分母が  $1539=81\times 19$  になっている。このように、一年または一朔望月の端数を分数化すると同時に、両者をなるべく共通の簡単な分数で表示するための苦心が、分数の四則演算を発達させた、と言える。また、最大公約数、最小公倍数、互除法、その他、所謂「初等整数論」に属する算法を発達させた。天文・暦法における

《上元》は、太陽、月、木星が規準位置にある時を指し、それは大初元年(B.C.104)から何年昔か？を問うた。この気が遠くなるような太古を求める問題への答えは、143,128 年昔だと計算した。問題の本質は「最小公倍数」に過ぎない。

南北朝の初め、博学・多作の何承天(420-478)は、「元嘉曆」(443)を作った。その際、端数を合理的に処理する新しい算法、すなわち《調日法》を発明した。この算法は、[11] p.197 以下に詳述したが、ここに再記する。

強率  $= 4/1 > \pi > 3/1 =$  弱率 から出発して、分子の和、分母の和を次々に作る。 $\pi$  は、計算の始めには、まだ数桁の近似値に過ぎない。仮に  $Q$  で表すこととし、さらに、例題としては  $\pi$  の簡略な値を考えるため、密率の近似値を  $Q = 3.141592$  と仮定する。(当面は、精密な  $\pi$  の値を求めることが課題ではない。むしろ  $\pi$  の近似分数を求めようとしている。)

さて、何承天の調日法なる算法を文字式で表せば、次の通り：

$a/b > Q > c/d$  から出発して、新たに分数  $(a+c)/(b+d) = e/f$  を作る。このとき  $a/b > e/f > c/d$  となることは必然だが、新たに作られた分数  $e/f$  と目標の  $Q$  とを比べたとき、大小の関係が問題となる。二つの場合が生じる。

I. もしも、 $e/f > Q$  となったならば、 $Q$  は初めよりも狭い範囲に挟まれて、 $a/b > e/f > Q > c/d$  となる。

II. もしも、 $Q > e/f$  となったならば、 $Q$  は初めよりも狭い範囲に挟まれて、 $a/b > Q > e/f > c/d$  となる。

具体的な例題として、 $4/1 > Q > 3/1$  から始めよう。 $(4+3)/(1+1)=7/2=3.5 > Q$ ,  $(7+3)/(2+1)=10/3=3.133\cdots > Q$ ,  $\cdots$ を続け、 $\cdots > 13/4 > 16/5$  を経て、 $16/5 > 19/6=3.166\cdots > Q$ ,  $22/7=3.1428\cdots > Q$  まで続けられる。

ところが、その次の回には、 $(22+3)/(7+1)=25/8=3.125 < Q$  となって、大小が逆転して、 $22/7 > Q > 25/8$  となる。〔結果として、左辺には祖沖之の「約率」 $R = 22/7$  が得られている。〕この様に、大小が逆転した所で、今までの「分子に 3 を加え、分母に 1 を加える」作業を止めて、第二の作業に移る。

それは、最後に得られた分数  $22/7$  と  $25/8$  とを新たに出発値と考えて、改めて、この二つの分子・分母から出発して、上と同様な調日法の作業、即ち  $(22+25)/(7+8)=47/15=3.133\cdots$  を作り、 $Q$  との大小の比較に移行する。

この様に、「つねに  $Q$  と比較して、大小が逆転しときは、 $Q$  を挟む両側の分子・分母を取り替えて次の段階の作業に移行する」のが、何承天の算法である。

途中の計算を省略して、まとめて言えば、 $22/7 > Q > 157/50$  を経て、最後に  $355/106 > Q \geq 355/113$  に到達する。途中の近似分数  $157/50$  は劉徽に因んで、《徽術》と呼ばれる。この右辺に得られた  $Q = 355/113$  が、目標とした祖沖之の「密率」である。以上が「何承天の算法」である。(言葉で説明すれば、煩瑣であるが、具体的な数値を用いれば、自動的に計算できる。)

調日法は次に述べる連分数より劣るが、分母に絶えず 1 を加えて比較する「関の算法」と比べれば、分母に「1 よりも大きな数値」を加える点で優れている。

私は、青と黄の絵の具を渡されて、指定された緑を作る作業に擬えた。最初、勝手に青と黄を混ぜる。出来た色が青すぎれば黄を加える。黄すぎれば青を加える。この作業を繰り返して、次第に指定された緑に近づける。

## 第 16 節 連分数

$Q = 3.1415926536$  を目標にして、連分数を説明しよう。初め  $f = 3$  と置く。

$$Q = f + 0.1415926536 = f + 1/7.062513305 = f + 1/(7 + 0.062513305),$$

なる変形が、連分数の基本の算法である。分母に出た 7.062513305 を、整数部分 7 と分数部分 0.062513305 とに分離し、さらに分数部分の逆数を求める。

このように、連分数に特有な算法は、1 未満の数（上例では 0.1415926536）の逆数（7.062513305）を求め、その整数部分 7 に注目し、残りの分数部分（0.062513305）から、さらに次の逆数（15.996594645）を求める。等々。

$$g = 7 \text{ とおけば、 } Q = f + 1/(g + (1/15.996594645)).$$

$$\begin{aligned} h = 15 \text{ とおき、 } Q &= f + 1/(g + (1/(h + 0.996594645))) \\ &= f + 1/(g + (1/(h + 1/1.0034167))))). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j = 1 \text{ とおき、 } Q &= f + 1/(g + (1/(h + 1/(j + 0.0034167)))))) \\ &= f + 1/(g + (1/(h + 1/(j + 1/292.68))))). \end{aligned}$$

最後の括弧内の分数  $1/292.68 = 0.0034167$  は、数値が小さいので無視すれば、

$$Q = f + 1/(g + (1/(h + 1/j)))$$

となる。これから逆算して、 $Q \div f = 3$ ,  $Q \div f + 1/g = 3 + 1/7 = 22/7$ ,

$$Q \div f + 1/(g + (1/h)) = 3 + 1/(7 + (1/15)) = 3 + 1/(106/15) = 333/105,$$

$$Q \div f + 1/(g + (1/(h + 1/j))) = 3 + 1/(7 + (1/(15 + 1/1)))$$

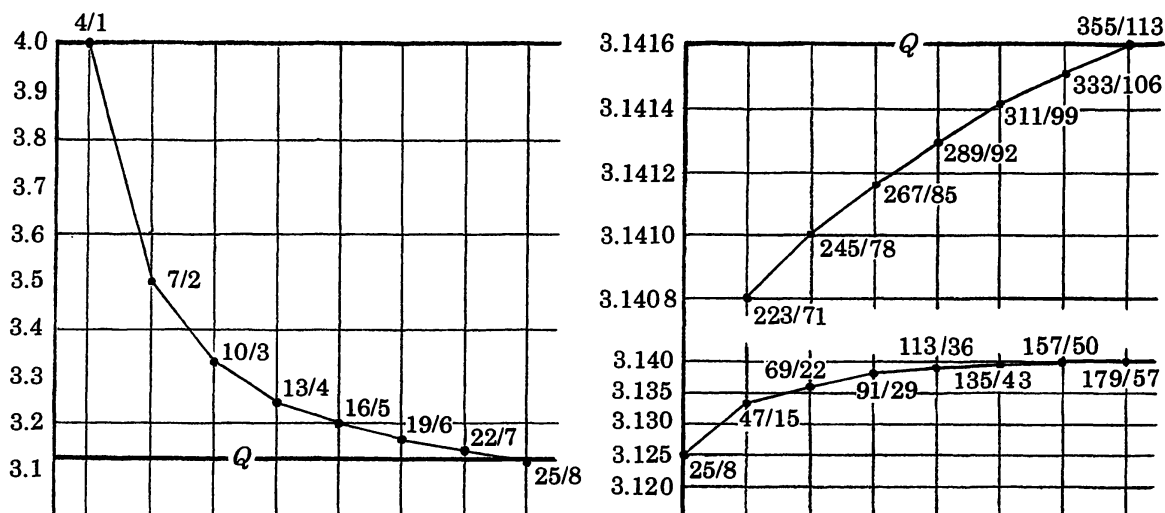
$$= 3 + 1/(7 + (1/16)) = 3 + 1/(113/16) = 3 + 16/113 = (339 + 16)/113$$

を経て、 $Q = 355/113$  即ち密率に達する。途中で約率  $R = 22/7$  も得られる。

## 第 17 節 二つの算法の比較

調日法と連分数との比較。左図、4/1 から 22/7 まで  $Q$  より大きく、22/7 で  $Q$  に最接近し、25/8 は  $Q$  より小さい。目標  $Q$  に近づけば勾配は緩やかになる。

続きは右図。25/8 から後の変化は甚だしく一図に収まらない。右下図は 25/8 から 179/57 まで示す。一部を省略し、上下を拡大した右上図の 223/71 に飛ぶ。 $Q$  の直前の 333/106 は  $Q$  より小、直後の 355/113 は  $Q$  を越え、 $Q$  に密着する。左図では 4/1 から 22/7 まで近似分数は  $Q$  より 7 回大きい。右図（途中を省略）では、25/8 から 333/106 まで、中間近似分数が  $Q$  より 15 回小さい。調日法の場合、一歩づつ近づいた回数の 7 または 15 が、連分数の場合、ただ



一回の割り算によって  $7.062\cdots$  の整数部分の 7, または  $15.996\cdots$  の整数部分の 15 として決まるので、効率が良い。連分数が優れた算法なる所以である。

### 第 18 節 祖沖之の約率と密率

祖沖之による密率の計算方法は何も伝わらない。何承天の調日法を継承したと想像される。調日法によれば、祖の約率  $R=22/7=3.1428\cdots > Q$  は、すでに上の計算の中に表れていた。文献上、約率  $R$  はあまり重視されないが、簡単な分数の割には優れた分数と私は考える。聖書に言う 3 は、素朴・粗雑すぎる。祖の約率  $R=22/7$  ならば、紙細工、木工の加工に十分な精度である。

私は（上）の第 11 節で、祖沖之は 24576 角の内面積まで求めたこと（同角の外面積は直ちに得られること）を述べた。祖の密率  $Q=355/113$  を得るためには、実はそれほど多くの内面積を求める必要はない。手前の 3072 角の内面積  $Y=3.14159\ 046$  まで求めて置けば充分である。その直前の 1536 角の内面積  $X=3.14158\ 389$  も用い、3072 角の外面積  $Z=3.14159\ 703$  も直ちに得られる。（私はいま理論として、祖の密率を得るためギリギリの値を問題としている。）

祖の密率  $Q = 355/113$  を理論的に未知の分数とし、未知ながら、不等式

$$Z = 3.14159\ 703 > Q > Y = 3.14159\ 046$$

を満たす或る分数と仮定する。この不等式のみを既知として議論を進めよう。

### 第 19 節 密率の探求

祖沖之の約率  $R=22/7=3.1428\cdots > Q$  が、甚だ良い近似値であることは、次の計算によって確かめられる。出発値は任意だが、第 15 節の初めの不等式

$$22/7=3.14285\ 714\cdots > Q > 25/8=3.125$$

から出発する。何承天の算法を用いて、次には  $(22+25)/(7+8)=47/15=3.133\cdots$  を作って  $Q$  と比較すれば、

$$22/7=3.14285\ 714\cdots > Q > 47/15=3.133\cdots > 25/8=3.125$$

となる。次は、 $22/7$  と  $47/15$  から  $69/22$  を作る、等々と続ける。この作業によって、次々に生じる分数は(その分母のみ示すと) 29, 36, 43, 50, 57, 64, 71, 78, 85, 92, 99 であり、目標の  $311/99$  までの間、凡て  $Q$  よりも小さい分数が得られ、しかもそれぞれ一つ手前の分数よりは大きい数となり、

$22/7=3.14285\ 714\cdots > Q > 311/99=3.141414\cdots > \cdots > 25/8=3.125$  等を辿る。さらに  $Q$  を挟む両側の分数  $22/7$  と  $311/99$  に何承天の算法を施せば、密率  $Q = 355/113 = 3.14159\ 29203\cdots$  に到達する。

何故連分数が調日法よりも能率よく収束するのか、理由が再び説明できる。 $355/113$  と  $47/15$  と  $25/8$  の分母に注目すれば  $(113-8)/(15-8)=105/7=15$ 、即ち、上記の不等式の系列の分母は、 $25/8$  から  $355/113$  まで、途中を飛ばし一挙に 15 回近づく。回数 15 は、連分数の演算の中に、 $h=15$  として出て来た。調日法が一步ずつ分母を増やして目標値に近づいたのに対して、連分数は演算の中に出て来る  $h=15$  を求めて、一挙に目標の値に近づいた。

## 第20節 密率の独自性と偶然性

前回(上)で、中国人たちによる「祖先の大学者祖冲之への賛美」を述べた(それは当然である)。対する日本は、倭王武(雄略)の時代であった。

注目すべきは、密率  $355/113=3.14159\ 29203\cdots$  を、前回(上)第12節で示した計算と比較すれば、従来見逃されてきたことだが、

(24576 角の内面積)  $3.141592619 < \pi < 3.141592722$  (24576 角の外面積) であり、密率は 24576 角の外面積よりも外側にはみ出している。即ち、密率は万能ではない！円周率  $\pi$  の近似値とは言っても、約率  $22/7$  は小数 3.14 の近似値として、密率  $355/113$  は小数 3.141592 の近似値として有効なのであって、必要な精度に応じて、その段階で効力を発揮する近似分数に過ぎない。

社会生活のみならず、歯車の噛み合わせに頼る精密機械工場の精度の範囲内では、《密率》は非常に良い近似値である。しかし純粹数学の立場に立つ私たちは、いま私が指摘した密率の限界に目を瞑っても良いのだろうか？

密率  $355/113=3.1415929203\cdots$ 、この分数が出現する実情を知るため、逆数  $1/113=0.0088495575$  (80 桁省略)  $6371681415\ 9292035398\ 230\cdots$  の下線部の数字の並び方に注目しよう。ここに  $Q$  の小数表示との一致部分が現れているではないか。1/113 の 87 桁目から、待望の小数部分が現れる！密率の出現を、小数点直下の開始に調整するには分子を  $355-113\cdot 3=16$  とし、 $16/113=0.1415929\cdots$  と加工すれば良い。密率  $355/113$  とは、分数  $1/113$  の途中の桁に良い数字の並びが出る、僥倖とも言うべき偶然の産物に過ぎない。

こんなに都合の良い現象が、いつでも現れるのか？有名な定数を試そう。

自然対数の底  $e=2.71828\ 18284\cdots$  は、 $1/e$  などを試しても、《うまい》近似分数は得られない。オイラーの定数  $C=0.57721\ 56649\cdots$  も、レムニスケート定積分の  $A=1.31102\cdots$  も  $B=0.59907\cdots$  も、うまい近似分数にならない。

さらに、 $\pi$  を加工した数値の場合には、もはや綺麗な分数は出てこない。  
 $\sqrt{\pi}=1.7724\ 38509\cdots\sim 1/1, 2/1, 7/4, 16/9, 23/13, 39/22, 257/145, 296/167, \cdots$   
 $\pi^2=9.86960\ 44010\cdots\sim 9/1, 10/1, 69/7, 79/8, 227/23, 10748/1089, \cdots$   
 $\pi^2/6=1.64493\ 40668\cdots\sim 1/1, 2/1, 3/2, 5/3, 23/14, 51/35, 227/138, \cdots$  等々。  
 祖冲之の密率は  $\pi$  の近似分数を探すうちに、偶然に見つけた僥倖な結果に過ぎない！ 誰でも  $355/113$  を発見できる。祖は幸いにも発見が早かったのだ。

## 第 2 1 節 密率の次の近似分数

前稿、(上) 第 1 2 節で導いた 24576 角の内面積  $T=3.14159\ 26191\cdots$  と同角の外面積  $U=3.14159\ 27218\cdots$  を比較の目標とする。「何承天の調日法」だけでも、密率  $355/113$  よりも近似度の高い分数が導ける。それには、不等式

$$355/113=3.14159\ 29203\ 5\cdots > U > T > 493/157=3.14012\ 73885\ 1\cdots$$

と、 $355/113$  の一つ手前の  $333/106$  を元にして、次々に調日法を適用する。

$$(355 \cdot 1 + 333)/(113 \cdot 1 + 106) = 688/219 = 3.14155\ 25114\ 1\cdots$$

$$(355 \cdot 2 + 333)/(113 \cdot 2 + 106) = 1043/332 = 3.14156\ 62605\ 6\cdots$$

… (中略) …

$$(355 \cdot 291 + 333)/(113 \cdot 291 + 106) = 103638/32989 = 3.14159\ 26520\ 9\cdots$$

$$(355 \cdot 292 + 333)/(113 \cdot 292 + 106) = 103993/33102 = 3.14159\ 26530\ 1\cdots$$

分母の  $113 \cdot n + 106$  は、 $n=1$  から  $n=292$  まで続く。次の 293 の場合は、

$$(355 \cdot 292 + 333)/(113 \cdot 293 + 106) = 104348/33125 = 3.14159\ 26539\ 214\cdots$$

で、 $\pi$  よりも大きいので、 $103993/33102$  で止める。このように、 $\pi$  の近似分数を探求するために何承天の算法を用いただけでも、密率  $Q=355/113$  を超える優秀な近似分数  $P=103993/33102$  が得られる。 $P$  は連分数を用いれば、

$$3 + 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/292)))$$

と表され、24576 角の外面積  $U$  と 24576 角の内面積  $T$  の間に挟まれる：

$$U > P = 103993/33102 > T$$

$U$  から  $P$  までの中間を細かく探した結果、密率  $355/113$  に匹敵するような、綺麗な数字が並ぶ分数は出て来ない。(綺麗なという規準は曖昧である。)

## 第 2 2 節 頭打ちの問題

前回、(上) 第 1 2 節の内容への補足。 $\pi$  をほぼ 10 桁の数値で 98304 角まで計算を進めてみよう。小数点下 5 桁まで用い切捨て原則によれば、案外早く限界に達する。第 3 節の表をこの精度で進めよう。次のように辺数 192 で、早

くも限界に達した。[6] 錢宝琮の数表の場合は、小数点下 6 桁まで示したので、192 角では余裕がありそうに見えたが、用いる数値を小数点下 5 桁までに限定すれば、早くも限界に達していたのだ。さらに多くの桁数を用いれば、計算は続けられるが、それもどのみち限界に突き当たる。

辺数	各辺長	内面積	面積差	外面積
6	0.51763	3	—	—
12	0.26105	3.10582	0.10582	3.21105
24	0.13080	3.13262	0.02680	3.15942
48	0.06543	3.13935	0.00673	3.14608
96	0.03272	3.14112	0.00177	3.14289
192	0.01636	3.14112	0.00000	3.14112

### 第 2 3 節 錢の計算への批判

[6] 錢宝琮の論文集の一論文に、12288 角の内面積=3.14159251, 24576 角の内面積=3.14159261 と出ている。私は、非常に細かい話ながら、[1]の国際会議で、この数値の根拠に対する疑問を述べた。数値計算の特殊な話題である。

前回(上)の数表Ⅱで、私が示した結論は 12288 角の 3.14159 25164 … 及び 24576 角の 3.14159 26191 … であり、多数桁の値を用い、下からの積み上げ計算によって求めた。錢論文の数値は、私のような計算を経ないで、三角関数表から、 $6144 \sin(\pi/6144)=3.14159\ 2516\cdots$ 、及び  $12288 \sin(\pi/12288)=3.14159\ 2619\cdots$  と求めた、と想像される。もしくは前論文(上)の第 9 節で述べたような級数(22)を用いいただろうと考える。末位の処理方法でも、前者が …25164… で、後者が …26191… であるから、末位を四捨五入して、前者を …252, 後者 …262 としてもよいはずなのに、錢はそうにしない。細かい点に対する《重箱の隅を突くような》批判である。掛ける係数 3072 と 6144 を考慮すれば、錢にとっては、各 AC の値を用いて、少なくとも

$$0.00102\ 26538\ 13942 \times 3072 = 3.14159\ 25164\ 29824$$

$$0.00051\ 13269\ 23682\ 137 \times 6144 = 3.14159\ 26191\ 03050$$

程度の値が計算可能な、有効数字の桁数の多い計算が必要であった筈だ。

しかし、錢が論文[6]に示した数値 3.14159251 と 3.14159261 は、桁数が少ない。私が前回(上)で述べた、地道な下からの積み上げ計算によったとは、到底思われない。私は自作の高精度計算を用い、遥かに桁数の多い数値を使い、積み上げの計算を実行したから、この間の事情がよく分かる。錢論文の 1923 年当時は、ソロバンと数表しか使えない。錢は手許の「三角関数表」の正弦の値に係数 3072 または 6144 を掛けた、と推測される。しかも普通の 7 桁の数表ではなく、天文計算で用いられる桁数の多い数表を用いたであろう。



## 第24節 循環連分数(補足)

前回(上)の第5節で、平方根 $\sqrt{0.75}$ を数値で求めた。ここで、連分数の算法について簡単に補足する。その前に、前回(上)の第5節には誤りがあったので、第5節の2行目から16行目までを、次のように訂正する。

「

解説されている。通常の「開平方」が、二次の方程式

$$(11) \quad x^2 = c$$

を解くのに対して、開帯従平方は、一次の項(従)  $bx$  を伴う(帯)二次方程式

$$(12) \quad x^2 + bx = c$$

を解く。第7節で必要な  $\sqrt{0.75}$  を求めよう。 $t=0.8$  ならば  $0.75-t^2=0.11$  で不足する。 $\sqrt{0.75}=0.8+x$  と置き、 $0.75=0.64+1.6x+x^2$ 、ここから、

$$(13) \quad x^2 + 1.6x = 0.11$$

なる開帯従平方を得る。 $x$  は小なので、それよりも更に小さい  $x^2$  を無視し、 $x=0.11/1.6=0.06875$  を得る。この内、上位の数  $x=0.06$  を採用して

$$(14) \quad x = 0.86 + y$$

と置けば、次の式を得る。

$$(15) \quad y^2 + 1.72y = 0.75 - 0.86^2 = 0.75 - 0.7396 = 0.0104.$$

再び  $y^2$  を無視し、 $y = 0.0104/1.72 = 0.0060465116$  を得る。云々。途中は(似たような計算が続くが)省略することにして、最後に

$$(16) \quad \sqrt{0.75} = 0.8660254037\cdots \quad [= \sqrt{0.3} \div 2]$$

に達する。これから目標の  $1-\sqrt{0.75} = 0.1339745962\cdots$  を得たのであろう。

」

本節では、区別のため、括弧付きの式番号の代わりに、○付きの式番号を用いる。上記の平方根 ( $x$  の代わりに  $r$  と置く)

$$\textcircled{1} \quad r = \sqrt{0.75} = 0.8660254037\cdots$$

を小数9位まで示し、その逆数も、同じ桁数だけ示してみる。先ず

$$\textcircled{2} \quad 1/r = 1.154700538\cdots = 1 + 0.154700538\cdots = 1 + a$$

と置き、 $a$  の逆数を求めると、

$$\textcircled{3} \quad 1/a = 1/0.154700538\cdots = 6 + 0.464101615\cdots = 6 + b$$

となる。次々に整数部分と小数部分に分けていく。この算法を続けると、

$$\textcircled{4} \quad 1/b = 1/0.464101615\cdots = 2 + 0.154700538\cdots = 1 + a$$

のように、 $a$  として、 $\textcircled{2}$  と同じ  $0.154700538\cdots$  が出てくる。従って、この計算を続けていけば、式  $\textcircled{2}$  と式  $\textcircled{3}$  の計算が、交互に繰り返されることが、容易に分かる。ただし、連分数の計算においては、多くの桁数を用いて計算しなければ、小数部分に誤差が積み重なるので、注意が必要である。

一般の連分数  $(a, b, c, d, \dots)$  を

$$\textcircled{5} \quad a/(1+b/(1+c/(1+d/\dots)))$$

と書く。しかし、式⑤のように括弧を重ねた形で書くのは煩わしい。連分数の理論では、必要となる数値  $a, b, c, d, \dots$  (これは部分商と呼ばれる) のみをブラケットで囲んで、

$$\textcircled{6} \quad r = [a, b, c, d, \dots]$$

と表すのが普通である。

連分数の内には、同じ数値  $a$  が続く場合、または二つの数値  $a$  と  $b$  が繰り返される場合がある。これらを循環連分数と呼ぶ。例えば、 $\sqrt{2}$  は 1 の後 2 が繰り返され、 $[1, 2, 2, 2, \dots]$  となる。次々の近似分数は、 $3/2=1.5$ ,  $7/5=1.4$ ,  $17/12=1.4166\dots$ ,  $41/29=1.4137\dots$  となって、急速に  $\sqrt{2}$  に近づく。このように、急速に目標の平方根に近づくところが、連分数の特徴である。

さて、前回 (上) の例題  $r = \sqrt{0.75}$  の場合は、1 の後二つの数値 6 と 2 が繰り返し表れる場合であり、 $[1, 6, 2, 6, 2, \dots]$  となる。1 の後、近似分数  $6/7$ ,  $13/15$ ,  $84/97, \dots$  を得、数値では  $0.857\dots$ ,  $0.8666\dots$ ,  $0.865979\dots$  となり、平方根  $\sqrt{0.75}=0.86602\ 54037\dots$  に急速に近づく。

「二次の無理数は、必ず循環連分数に展開される」という定理がある。循環連分数は二次の無理数に特有な性質であり、三次の無理数も、超越数 ( $\pi$  など) も循環連分数に展開されない。[12]『初等整数論講義』を参照して頂きたい。

なお連分数を話題にしたのは、「中国古代に連分数の理論があった」と主張するためではない。あくまで、前回 (上) の第 5 節に対する数学的な内容の補足に過ぎない。

#### 文献 (追加)

- [9] 平山諦・下平和夫・広瀬秀雄編：関孝和全集、大阪教育図書、1974.
- [10] 藪内清：中国の天文暦法、平凡社、1969.
- [11] 杉本敏夫：解説・関孝和、海鳴社、2008.
- [12] 高木貞治：初等整数論講義、共立出版、初版 1931, 第 2 版 1971